
Exercícios Resolvidos de Dinâmica Clássica

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,
Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro
“Fundamentos de Física”, Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas>

Conteúdo

11 ROTAÇÃO

11.1	Questionário	2
11.2	Exercícios e Problemas	2
11.3	Problemas Adicionais	9

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para [jgallas @ if.ufrgs.br](mailto:jgallas@if.ufrgs.br)
(listam2.tex)

11 ROTAÇÃO

11.1 Questionário

Q11-3.

O vetor que representa a velocidade angular de rotação de uma roda em torno de um eixo fixo tem de estar necessariamente sobre este eixo?

► Sim, o vetor velocidade angular define o eixo de rotação. Mesmo quando o eixo não é fixo, o vetor está dirigido ao longo desse eixo, como no caso do movimento de um pião. A velocidade angular de precessão também é um vetor dirigido ao longo da direção em torno da qual o eixo do pião precessiona.

Q11-8.

Por que é conveniente expressar α em revoluções por segundo ao quadrado na expressão $\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ e não na expressão $a_t = \alpha r$?

► Porque na equação $\theta = \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2}$, θ e ω_o também são quantidades mensuráveis em revoluções e revoluções por segundo, respectivamente. Mas na equação $a_t = \alpha r$, para se obter a aceleração linear em m/s^2 , α deve ser expressa em radianos/s^2 .

Q11-9.

Um corpo rígido pode girar livremente em torno de um eixo fixo. É possível que a aceleração angular deste corpo seja diferente de zero, mesmo que a sua velocidade angular seja nula (talvez, instantaneamente)? Qual o equivalente linear desta situação? Ilustre ambas as situações com exemplos.

► Sim. Se o corpo rígido for submetido a uma desaceleração, sua velocidade angular eventualmente será nula, e depois começará a crescer no sentido contrário. O equivalente linear dessa situação pode ser a de um corpo jogado verticalmente para cima; sua velocidade zera no ponto mais alto da trajetória e ele torna a cair.

Q11-13.

Imagine uma roda girando sobre o seu eixo e considere um ponto em sua borda. O ponto tem aceleração radial, quando a roda gira com velocidade angular constante? Tem aceleração tangencial? Quando ela gira com

aceleração angular constante, o ponto tem aceleração radial? Tem aceleração tangencial? Os módulos dessas acelerações variam com o tempo?

► Sim, a aceleração radial é $a_r = \omega^2 r$. A aceleração tangencial é nula nesse caso. Girando com aceleração angular constante, o ponto da borda tem aceleração radial $a_r(t) = (\alpha t)^2 r$ e aceleração tangencial $a_t = \alpha r$, constante.

Q11-15.

Qual a relação entre as velocidades angulares de um par de engrenagens acopladas, de raios diferentes?

► Pontos da borda das engrenagens tem a mesma velocidade linear: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Assim, a engrenagem que tem o menor raio, tem a maior velocidade angular.

Q11-21.

A Fig. 11.25a mostra uma barra de 1 m, sendo metade de madeira e metade de metal, fixada por um eixo no ponto O da extremidade de madeira. Uma força \mathbf{F} é aplicada ao ponto a da extremidade de metal. Na Fig. 11.25b, a barra é fixada por um eixo em O' na extremidade de metal e a mesma força é aplicada ao ponto a' da extremidade de madeira. A aceleração angular é a mesma para os dois casos? Se não, em que caso ela é maior?

► A densidade dos metais é maior do que das madeiras, tal que na situação (b), o momento de inércia da barra em relação ao ponto O' é maior do que no caso (a). Assim, pela relação $\tau = I\alpha$, vem que $I_{(a)}\alpha_{(a)} = I_{(b)}\alpha_{(b)}$. As acelerações angulares não são iguais nos dois casos, sendo $\alpha_{(a)} > \alpha_{(b)}$.

11.2 Exercícios e Problemas

Seção 11-2 As Variáveis de Rotação

11-6P.

Uma roda gira com uma aceleração angular α dada por $\alpha = 4at^3 - 3bt^2$, onde t é o tempo, e a e b são constantes. Se ω_o é a velocidade inicial da roda, deduza as equações para (a) a velocidade angular e (b) o deslocamento angular em função do tempo.

► (a) Para obter a velocidade angular, basta integrar a aceleração angular dada:

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega' = \int_0^t \alpha dt'$$

$$\omega - \omega_o = a t^4 - b t^3$$

$$\omega(t) = \omega_o + a t^4 - b t^3$$

(b) O deslocamento angular é obtido integrando a velocidade angular:

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta' = \int_0^t \omega dt'$$

$$\theta - \theta_o = \omega_o t + a \frac{t^5}{5} - b \frac{t^4}{4}$$

$$\theta(t) = \theta_o + a \frac{t^5}{5} - b \frac{t^4}{4}$$

11-10P.

Uma roda tem oito raios de 30 cm. Está montada sobre um eixo fixo e gira a 2,5 rev/s. Você pretende atirar uma flecha de 20 cm de comprimento através da roda, paralelamente ao seu eixo, sem que a flecha colida com qualquer raio. Suponha que tanto a flecha quanto os raios sejam muito finos; veja a Fig. 11.26. (a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter? (b) A localização do ponto que você mira, entre o eixo e a borda da roda, tem importância? Em caso afirmativo, qual a melhor localização?

► (a) O ângulo entre dois raios consecutivos é $\pi/4$ e o tempo necessário para percorrê-lo é

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi/4}{5\pi} = 0,05 \text{ s.}$$

A velocidade mínima da flecha deve ser então

$$v = \frac{l}{t} = \frac{0,20}{0,05} = 4,0 \text{ m/s.}$$

(b) Não, se a velocidade angular permanece constante.

11-15E.

O volante de um motor está girando a 25,0 rad/s. Quando o motor é desligado, o volante desacelera a uma taxa constante até parar em 20,0 s. Calcule (a) a aceleração

angular do volante (em rad/s²), (b) o ângulo percorrido (em rad) até parar e (c) o número de revoluções completadas pelo volante até parar.

► (a) Sendo $\omega_o = 25,0$ rad/s, tem-se

$$\omega = \omega_o - \alpha t = 0$$

$$\alpha = \frac{\omega_o}{t} = \frac{25,0}{20,0} = 1,25 \text{ rad/s}^2.$$

(b) O ângulo percorrido é

$$\theta = \omega_o t - \alpha \frac{t^2}{2}$$

$$\theta = 250 \text{ rad.}$$

(c) Para o número de revoluções N , temos

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = 39,80 \text{ revoluções.}$$

11-23P.

Um disco gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso com aceleração angular constante até alcançar a rotação de 10 rev/s. Depois de completar 60 revoluções, sua velocidade angular é 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar as 60 revoluções, (c) o tempo necessário para alcançar a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções desde o repouso até a velocidade de 10 rev/s.

► (a) A velocidade angular do disco aumenta de 10 rad/s para 15 rad/s no intervalo necessário para completar as 60 revoluções.

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\theta} = 1,04 \text{ rev/s}^2.$$

(b) O tempo necessário para as 60 voltas é

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = 4,8 \text{ s.}$$

(c) O tempo até alcançar 10 rad/s é

$$t' = \frac{\omega_o}{\alpha} = 9,62 \text{ s.}$$

(d) E o número de voltas dadas no intervalo é

$$\theta = \frac{\omega_o^2}{2\alpha} = 48 \text{ revoluções.}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\mu_o g}{R}}$$

(b) A moeda é projetada tangencialmente, seguindo uma trajetória retilínea.

Seção 11-5 As Variáveis Lineares e Angulares

11-29E.

Uma turbina com 1, 20 m de diâmetro está girando a 200 rev/min. (a) Qual a velocidade angular da turbina em rad/s? (b) Qual a velocidade linear de um ponto na sua borda? (c) Que aceleração angular constante (rev/min²) aumentará a sua velocidade para 1000 rev/min em 60 s? (d) Quantas revoluções completará durante esse intervalo de 60 s?

► (a) A velocidade angular em rad/s é

$$\omega = \frac{(200)(2\pi)}{60} = 20.94 \text{ rad/s.}$$

(b) Qualquer ponto da borda da turbina move-se à velocidade

$$v = \omega r = (20.94)(0.60) = 12.56 \text{ m/s.}$$

(c) A aceleração angular necessária é

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{1000 - 200}{1.0} = 800 \text{ rev/min}^2.$$

(d) O número do voltas no intervalo de 1.0 minuto é

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\alpha} = 600 \text{ rev.}$$

11-34E.

Uma certa moeda de massa M é colocada a uma distância R do centro do prato de um toca-discos. O coeficiente de atrito estático é μ_e . A velocidade angular do toca-discos vai aumentando lentamente até ω_o , quando, neste instante, a moeda escorrega para fora do prato. (a) Determine ω_o em função das grandezas M , R , g e μ_e . (b) Faça um esboço mostrando a trajetória aproximada da moeda, quando é projetada para fora do toca-discos.

► (a) A moeda está sob a ação da força centrípeta

$$F = M\omega^2 R.$$

Quando o prato atinge a velocidade ω_o , a força centrípeta é igual à máxima força de atrito estático:

$$M\omega_o^2 R = \mu_o M g$$

11-36P.

A turbina de um motor a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando o vapor é desligado, o atrito nos mancais e a resistência do ar param a turbina em 2, 2 h. (a) Qual a aceleração angular constante da turbina, em rev/min², durante a parada? (b) Quantas revoluções realiza antes de parar? (c) Qual a componente tangencial da aceleração linear da partícula situada a 50 cm do eixo de rotação, quando a turbina está girando a 75 rev/min? (d) Em relação à partícula do ítem (c), qual o módulo da aceleração linear resultante?

► (a) O intervalo dado corresponde a 132 min. A aceleração angular é

$$\alpha = \frac{\omega_o}{t} = 1.136 \text{ rev/min}^2.$$

(b) O número de voltas até parar é

$$\theta = \frac{\omega_o^2}{2\alpha} = 9903 \text{ rev.}$$

(c) Para obter a aceleração linear tangencial em unidades SI, a aceleração angular deve estar expressa em rad/s². Fazendo a conversão, obtemos $\alpha = 1.98 \times 10^{-3}$ rad/s² e

$$a_t = \alpha r = 9.91 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

(d) A velocidade angular $\omega = 75$ rev/min corresponde a 7.85 rad/s e

$$a_r = \omega^2 r = 30.81 \text{ m/s}^2.$$

Portanto, o módulo da aceleração linear resultante é

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = 30.81 \text{ m/s}^2.$$

11-42P.

Quatro polias estão conectadas por duas correias conforme mostrado na Fig. 11 – 30. A polia A (15 cm de raio) é a polia motriz e gira a 10 rad/s. A B (10 cm de raio) está conectada à A pela correia 1. A B' (5,0 cm de raio) é concêntrica à B e está rigidamente ligada a ela. A polia C (25 cm de raio) está conectada à B' pela

correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto na correia 1, (b) a velocidade angular da polia B , (c) a velocidade angular da polia B' , (d) a velocidade linear de um ponto na correia 2 e (e) a velocidade angular da polia C .

- (a) A velocidade linear de qualquer ponto da correia 1 é

$$v_1 = \omega_A r_A = 1.5 \text{ m/s.}$$

- (b) A velocidade v_1 é a velocidade dos pontos da borda da polia B , cuja velocidade angular é então

$$\omega_B = \frac{v_1}{r_B} = 15 \text{ rad/s.}$$

- (c) As polias B e B' giram em torno do mesmo eixo, de modo que

$$\omega_{B'} = \omega_B = 15 \text{ rad/s.}$$

- (d) A velocidade linear de qualquer ponto da correia 2 é

$$v_2 = \omega_{B'} r_{B'} = 0.75 \text{ m/s.}$$

- (e) Os pontos da borda da polia C tem velocidade linear v_2 . Portanto,

$$\omega_C = \frac{v_2}{r_C} = 3.0 \text{ rad/s.}$$

Seção 11-6 Energia Cinética de Rotação

11-46P.

A molécula de oxigênio, O_2 , tem massa total de $5.3 \times 10^{-26} \text{ kg}$ e um momento de inércia de $1.94 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, em relação ao eixo que atravessa perpendicularmente a linha de junção dos dois átomos. Suponha que essa molécula tenha em um gás a velocidade de 500 m/s e que sua energia cinética de rotação seja dois terços da energia cinética de translação. Determine sua velocidade angular.

- Com a relação dada entre as energias cinéticas, temos

$$K_{\text{rot.}} = \frac{2}{3} K_{\text{trans.}}$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

Introduzindo os valores de m , I e v , obtemos $\omega = 6.75 \times 10^{12} \text{ rad/s}$.

Seção 11-7 Cálculo do Momento de Inércia

11-49E.

As massas e as coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g , $x = 2, 0 \text{ cm}$, $y = 2, 0 \text{ cm}$; 25 g , $x = 0$, $y = 4, 0 \text{ cm}$; 25 g , $x = -3, 0 \text{ cm}$, $y = -3, 0 \text{ cm}$; 30 g , $x = -2, 0 \text{ cm}$, $y = 4, 0 \text{ cm}$. Qual o momento de inércia do conjunto em relação (a) ao eixo x , (b) ao eixo y e (c) ao eixo z ? (d) Se as respostas para (a) e (b) forem, respectivamente, A e B , então qual a resposta para (c) em função de A e B ?

► Este exercício é uma aplicação do teorema dos eixos perpendiculares, não apresentado dentro do texto. Este teorema é válido para distribuições de massa contidas num plano, como placas finas. Aqui temos uma distribuição discreta da massa no plano xy . Vamos indicar as massas por m_i e coordenadas x_i e y_i na ordem em que aparecem no enunciado.

- (a) Momento de inércia em relação ao eixo x : a distância das partículas ao eixo é medida no eixo y

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

$$= m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 + m_4 y_4^2$$

$$= 1.305 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- (b) Para o cálculo do momento de inércia em relação ao eixo y , a distância da partícula ao eixo é medida ao longo do eixo x :

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

$$= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 + m_4 x_4^2$$

$$= 5.45 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- (c) Para o eixo z , temos

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2, \text{ com } r_i^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

Os cálculos fornecem $I_z = 1.9 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- (d) Somando os valores obtidos para I_x e I_y , confirma-se a relação

$$I_z = I_x + I_y,$$

que podemos identificar como o teorema dos eixos perpendiculares.

11-51E.

Duas partículas, de massa m cada uma, estão ligadas entre si e a um eixo de rotação em O por dois bastões delgados de comprimento l e massa M cada um, conforme mostrado na Fig. 11 – 32. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular ω . Determine, algebricamente, as expressões (a) para o momento de inércia do conjunto em relação a O e (b) para a energia cinética de rotação em relação a O .

► (a) O momento de inércia para o eixo passando por O é

$$\begin{aligned} I_o &= ml^2 + m(2l)^2 + \frac{Ml^2}{3} + \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{3l}{2}\right)^2 \\ &= 5ml^2 + \frac{8Ml^2}{3} \end{aligned}$$

(b) A energia cinética de rotação é

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(5ml^2 + \frac{8}{3} Ml^2 \right) \omega^2 \\ &= \left(\frac{5}{2} m + \frac{4}{3} M \right) l^2 \omega^2 \end{aligned}$$

11-58P.

(a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro sólido, de massa M e raio R , em relação a seu eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa M e raio $R/\sqrt{2}$ em relação a seu eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia I de um corpo qualquer de massa M em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um aro equivalente em relação a esse eixo, se o aro tiver a mesma massa M e raio k dado por

$$k = \frac{\sqrt{I}}{M}.$$

O raio k do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

► (a) Os momentos de inércia, em relação aos eixos mencionados, do aro e do cilindro são

$$I_A = MR^2 \text{ e } I_A = \frac{1}{2} MR^2.$$

Para que estes momentos de inércia sejam iguais, o aro deve ter um certo raio R' :

$$I_A = I_C$$

$$\begin{aligned} MR'^2 &= \frac{1}{2} MR^2 \\ R' &= \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) Igualando os momentos de inércia mencionados, temos

$$I = I_A = Mk^2.$$

Do que obtemos diretamente

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Seção 11-8 Torque

11-64P.

Na Fig. 11 – 36, o corpo está fixado a um eixo no ponto O . Três forças são aplicadas nas direções mostradas na figura: no ponto A , a $8,0$ m de O , $F_A = 10$ N; no ponto B , a $4,0$ m de O , $F_B = 16$ N; no ponto C , a $3,0$ m de O , $F_C = 19$ N. Qual o torque resultante em relação a O ?

► Calculamos o torque produzido por cada uma das forças dadas:

$$\tau_A = r_A F_A \text{ sen } 45^\circ = 56.57 \text{ N}\cdot\text{m, anti-horário,}$$

$$\tau_B = r_B F_B \text{ sen } 90^\circ = 64 \text{ N}\cdot\text{m, horário,}$$

$$\tau_C = r_C F_C \text{ sen } 20^\circ = 19.50 \text{ N}\cdot\text{m, anti-horário.}$$

Tomando o sentido positivo para fora do plano da página, somamos os valores obtidos acima para ter o torque resultante:

$$\tau_R = \tau_A - \tau_B + \tau_C$$

$$= 12.07 \text{ N}\cdot\text{m, anti-horário}$$

Seção 11-9 A Segunda Lei de Newton para a Rotação

11-70P.

Uma força é aplicada tangencialmente à borda de uma polia que tem 10 cm de raio e momento de inércia de $1,0 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ em relação ao seu eixo. A força tem módulo variável com o tempo, segundo a relação $F = 0,50t + 0,30t^2$, com F em Newtons e t em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Em $t = 3,0$

s, quais são (a) a sua aceleração angular e (b) sua velocidade angular?

► (a) O torque atuando sobre a polia no instante considerado é

$$\tau(t = 3.0) = rF(t = 3.0) = 0.42 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

A aceleração angular neste instante é

$$\alpha(t = 3.0) = \frac{\tau}{I} = 42 \text{ rad/s}^2.$$

(b) Obtemos a velocidade angular integrando a função $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\omega d\omega' &= \int_0^t (50t' + 30t'^2) dt' \\ \omega(t) &= 25t^2 + 10t^3 \\ \omega(t = 3.0) &= 495 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

11-75P.

Dois blocos idênticos, de massa M cada um, estão ligados por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de raio R e de momento de inércia I (veja Fig. 11-40). A corda não desliza sobre a polia; desconhece-se existir ou não atrito entre o bloco e a mesa; não há atrito no eixo da polia. Quando esse sistema é liberado, a polia gira de um ângulo θ , num tempo t , e a aceleração dos blocos é constante. (a) Qual a aceleração angular da polia? (b) Qual a aceleração dos dois blocos? (c) Quais as tensões na parte superior e inferior da corda? Todas essas respostas devem ser expressas em função de M , I , R , θ , g e t .

► (a) Se o sistema parte do repouso e a aceleração é constante, então $\theta = \alpha t^2/2$ e

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2}.$$

(b) Desconsiderando qualquer atrito, a aceleração das massas é a aceleração dos pontos da borda da polia:

$$a = \alpha R = \frac{2\theta R}{t^2}.$$

(c) Chamemos T_1 a tensão na parte vertical da corda. Tomando o sentido para baixo como positivo, escrevemos

$$Mg - T_1 = Ma.$$

Com a aceleração obtida acima, a tensão T_1 é

$$T_1 = M \left(g - \frac{2\theta R}{t^2} \right).$$

Aplicando a segunda Lei rotacional para a polia (escolhendo o sentido horário como positivo), temos

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha.$$

Tirando T_2 , vem

$$T_2 = Mg - \frac{2M\theta R}{t^2} - \frac{2I\theta}{Rt^2}.$$

11-77P.

Uma chaminé alta, de forma cilíndrica, cai se houver uma ruptura na sua base. Tratando a chaminé como um bastão fino, de altura h , expresse (a) a componente radial da aceleração linear do topo da chaminé, em função do ângulo θ que ela faz com a vertical, e (b) a componente tangencial dessa mesma aceleração. (c) Em que ângulo θ a aceleração é igual a g ?

► (a) A componente radial da aceleração do topo da chaminé é $a_r = \omega^2 h$. Podemos obter ω usando o princípio da conservação da energia. Para um ângulo θ qualquer, temos

$$mg\frac{h}{2} = mg\frac{h}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Com $I = mh^2/3$, obtemos

$$\omega^2 = \frac{3g(1 - \cos \theta)}{h},$$

e aceleração radial do topo então é

$$a_r = 3g(1 - \cos \theta).$$

(b) Para obter a componente tangencial da aceleração do topo, usamos agora a segunda Lei na forma rotacional:

$$\tau = I\alpha$$

$$mg\frac{h}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} mh^2 \alpha$$

Com $\alpha = 3g \sin \theta / 2h$, chegamos à aceleração pedida

$$a_t = \alpha h = \frac{3}{2} g \sin \theta.$$

(c) A aceleração total do topo é

$$a^2 = 9g^2(1 - \cos \theta)^2 + \frac{9}{4} g^2 \sin^2 \theta.$$

Fazendo $a = g$, e alguma álgebra, obtemos uma equação do segundo grau para a variável $\cos \theta$, cuja raiz fornece $\theta = 34.5^\circ$.

Seção 11-10 Trabalho, Potência e Teorema do Trabalho-Energia Cinética

11-82P.

Uma régua, apoiada no chão verticalmente por uma das extremidades, cai. Determine a velocidade da outra extremidade quando bate no chão, supondo que o extremo apoiado não deslize. (*Sugestão*: considere a régua como um bastão fino e use o princípio de conservação de energia.)

► Seguindo a sugestão dada, temos

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \omega^2,$$

que fornece $\omega = \sqrt{3g/l}$. Portanto, a velocidade da extremidade da régua, quando bate no chão, é

$$v = \omega l = \sqrt{3gl}.$$

11-83P.

Um corpo rígido é composto por três hastes finas, idênticas, de igual comprimento l , soldadas em forma de H (veja Fig. 11 – 41). O corpo gira livremente em volta de um eixo horizontal que passa ao longo de uma das pernas do H. Quando o plano de H é horizontal, o corpo cai, a partir do repouso. Qual a velocidade angular do corpo quando o plano do H passa pela posição vertical?

► O momento de inércia do corpo rígido para o eixo mencionado é

$$I = \frac{1}{3} ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2.$$

Usando o princípio da conservação da energia, temos

$$3mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} ml^2 \right) \omega^2,$$

e, tirando a velocidade angular, resulta

$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

11-86P.

Uma casca esférica uniforme, de massa M e raio R , gira sobre um eixo vertical, sem atrito (veja Fig. 11 – 42). Uma corda, de massa desprezível, passa em volta do equador da esfera e prende um pequeno corpo de massa m , que pode cair livremente sob a ação da gravidade. A corda prende o corpo através de uma polia de momento de inércia I e raio r . O atrito da polia em relação ao eixo é nulo e a corda não desliza na polia. Qual a velocidade do corpo, depois de cair de uma altura h , partindo do repouso? Use o teorema do trabalho-energia.

► Seguindo a sugestão do enunciado, o trabalho realizado pela gravidade sobre a massa m é $W = mgh$. Como o sistema parte do repouso, a variação da energia cinética é

$$\Delta K = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega_p^2 + \frac{1}{2} I_c\omega_c^2,$$

onde ω_p é a velocidade angular da polia e I_c e ω_c são o momento de inércia e a velocidade angular da casca esférica. A velocidade de m é também a velocidade linear dos pontos da borda da polia e dos pontos do equador da casca esférica. Então podemos expressar as velocidades angulares em termos da velocidade linear da massa m :

$$\omega_p = \frac{v}{r} \quad \text{e} \quad \omega_c = \frac{v}{R}.$$

Após essas considerações, temos, finalmente

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ mgh &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} MR^2 \right) \frac{v^2}{R^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} + \frac{2}{3} M \right) v^2 \end{aligned}$$

Tirando a velocidade v , obtemos

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + I/r^2 + 2M/3}.$$

Lembrando a equação de movimento $v^2 = 2ah$, podemos facilmente destacar a aceleração do resultado obtido, à qual chegamos se resolvemos o problema usando a segunda Lei.

11.3 Problemas Adicionais

11-91.

Uma polia de 0,20 m de raio está montada sobre um eixo horizontal sem atrito. Uma corda, de massa desprezível, está enrolada em volta da polia e presa a um corpo de 2,0 kg, que desliza sem atrito sobre uma superfície inclinada de 20° com a horizontal, conforme mostrado na Fig. 11-43. O corpo desce com uma aceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$. Qual o momento de inércia da polia em torno do eixo de rotação?

► Vamos usar aqui a segunda Lei, nas formas translacional e rotacional. Tomando o sentido positivo para baixo do plano inclinado temos

$$mg \sen 20^\circ - T = ma.$$

Para o movimento da polia, escrevemos

$$Tr = I\alpha = I \frac{a}{r}.$$

Trazendo T da primeira para a segunda equação, e explicitando I , temos

$$I = \frac{mr^2}{a} (g \sen 20^\circ - a) = 0.054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

11-93.

Dois discos delgados, cada um de 4,0 kg de massa e raio de 0,40 m, são ligados conforme mostrado na Fig. 11-44 para formar um corpo rígido. Qual o momento de inércia desse corpo em volta do eixo A, ortogonal ao plano dos discos e passando pelo centro de um deles?

► Temos aqui uma aplicação do teorema dos eixos paralelos. O momento de inércia do conjunto escrevemos como

$$I = I_1 + I_2,$$

onde $I_1 = mr^2/2$ é o momento de inércia do disco pelo qual passa o eixo. Para obter o momento I_2 do outro disco em relação a esse eixo, usamos o teorema:

$$I_2 = \frac{1}{2} mr^2 + m(2r)^2$$

$$= \frac{9}{2} mr^2$$

Para o corpo rígido todo temos então

$$I = I_1 + I_2 = 5mr^2 = 3.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

11-96.

Um cilindro uniforme de 10 cm de raio e 20 kg de massa está montado de forma a girar livremente em torno de um eixo horizontal paralelo ao seu eixo longitudinal e distando 5,0 cm deste. (a) Qual o momento de inércia do cilindro em torno do eixo de rotação? (b) Se o cilindro partir do repouso, com seu eixo alinhado na mesma altura do eixo de rotação, qual a sua velocidade angular ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória? (*Sugestão*: use o princípio de conservação da energia.)

► (a) Usamos o teorema dos eixos paralelos para obter o momento de inércia:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{CM}} + mh^2 \\ &= \frac{1}{2} mr^2 + m \left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ &= 0.15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

(b) Colocando o referencial de energia potencial nula no ponto mais baixo pelo qual passa o centro de massa do cilindro, temos

$$\begin{aligned} U_1 &= K_2 \\ mg \frac{r}{2} &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

Resolvendo para a velocidade angular, obtemos

$$\omega = 11.44 \text{ rad/s.}$$