

---

---

## Exercícios Resolvidos de Dinâmica Clássica

**Jason Alfredo Carlson Gallas**, professor titular de física teórica,  
Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro  
“Fundamentos de Física”, Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: <http://www.if.ufrgs.br/~jgallas>

---

---

### Conteúdo

		17.1	Questionário . . . . .	2	
		17.2	Exercícios e Problemas . . . . .	3	
<b>17</b>	<b>MOVIMENTO ONDULATÓRIO</b>	<b>2</b>	17.3	Problemas Adicionais . . . . .	9

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para [jgallas @ if.ufrgs.br](mailto:jgallas@if.ufrgs.br)  
(listam3.tex)

## 17 MOVIMENTO ONDULATÓRIO

### 17.1 Questionário

**17-2.** Energia pode ser transferida por partículas bem como por ondas. Como podemos distinguir experimentalmente esses métodos de transferência de energia?

► A energia é transferida entre partículas nos eventos de colisão, como acontece, por exemplo, num jogo com bolas de bilhar. Quando a energia é transferida por onda, *também* se dá pelas colisões das partículas do meio, no caso das ondas mecânicas, mas as partículas movem-se localizadamente, enquanto a onda se propaga por uma extensão muito maior. Um exemplo notório é o das ondas sonoras.

**17-6.** Compare o comportamento de (a) um sistema massa-mola oscilando num movimento harmônico simples e (b) um elemento de uma corda esticada onde uma onda senoidal se propaga. Discuta do ponto de vista do deslocamento, velocidade vetorial, aceleração e transferências de energia.

► (a) No sistema massa-mola, a energia é localizada, isto é, a massa detém a energia cinética e a mola, suposta sem massa, detém a energia potencial. Se a energia total é constante, em algum instante ela é toda da massa, quando esta passa pela posição de equilíbrio e em outro instante será toda potencial, quando a mola estiver na sua máxima deformação. Sendo o deslocamento medido em relação à posição de equilíbrio, a velocidade nessa posição é máxima, enquanto a aceleração é nula. Nos pontos de máximo deslocamento, a velocidade é nula e a aceleração é máxima.

(b) Para o elemento da corda esticada, a energia está distribuída em vez de localizada, porque todas as partículas do elemento se movem e sofrem a ação da tensão de deformação. O elemento está sob a máxima deformação quando está na posição de equilíbrio do MHS executado pelas partículas e é também nessa posição que a velocidade transversal atinge o seu máximo. Nos pontos de maior deslocamento das partículas em relação à posição de equilíbrio, elas tem velocidade e aceleração nulas.

**17-8.** Quando duas ondas interferem, uma atrapalha a propagação da outra? Explique.

► Não. As ondas se combinam pelo princípio de superposição formando uma onda progressiva com uma

redistribuição apropriada da sua energia, ou formando uma onda estacionária, com outra redistribuição de energia.

**17-9.** Quando duas ondas interferem, existe perda de energia? Justifique sua resposta.

► Não. Existe uma redistribuição da energia. Nos pontos de interferência destrutiva, a energia é nula, mas, conseqüentemente será maior nos pontos de interferência construtiva.

**17-11.** Se duas ondas diferem somente em amplitude e se propagam em sentidos opostos através de um meio, produzirão elas ondas estacionárias? Existirá energia transportada? Existirão nós?

► Não.

**17-13.** Uma onda transmite energia. Ela também transfere momento linear. Será possível transferir momento angular?

►

**17-15.** Uma corda é esticada entre dois suportes fixos separados de uma distância  $l$ . (a) Para quais harmônicos existirá um nó no ponto que dista  $l/3$  de um dos suportes? Existirá um nó, um antinó ou uma condição intermediária num ponto que dista  $2l/5$  de um dos suportes, se (b) o quinto harmônico foi gerado? (c) o décimo harmônico foi gerado?

► (a) Se o nó dista  $l/3$  de um dos suportes, a corda está vibrando na forma de 3 meios comprimentos de onda. Então trata-se do terceiro harmônico.

(b) No ponto que dista  $2l/5$  de um dos suportes, existirá um nó tanto para o quinto quanto para o décimo harmônicos.

**17-17.** Violonistas sabem que, antes de um concerto, deve-se tocar um pouco o violão e ajustar suas cordas porque, após alguns minutos de execução, as cordas se aquecem e cedem ligeiramente. Como esse pequeno afrouxamento afeta as frequências de ressonância das cordas?

► O afrouxamento das cordas tem como conseqüência a diminuição da velocidade de propagação das ondas na corda ( $v = \sqrt{\tau/\mu}$ ), alterando o conjunto das

freqüências de ressonância, isto é, o violão fica “desafiado”.

## 17.2 Exercícios e Problemas

### Seção 17-5 A Velocidade Escalar de Propagação de uma Onda

**17-3E.** Balançando um barco, um menino produz ondas na superfície de um lago até então quieto. Ele observa que o barco realiza 12 oscilações em 20 s, cada oscilação produzindo uma crista de onda 15 cm acima da superfície do lago. Observa ainda que uma determinada crista de onda chega à terra, a doze metros de distância, em 6,0 s. Quais são (a) o período, (b) a velocidade escalar, (c) o comprimento de onda e (d) a amplitude desta onda?

► Inicialmente, calculamos a freqüência, que é  $f = 12/20 = 0,6$  Hz. As grandezas pedidas são aplicações diretas de “fórmulas”:

(a)

$$T = f^{-1} = 1,67 \text{ s}$$

(b)

$$v = \frac{x}{t} = \frac{12}{6,0} = 2,0 \text{ m/s.}$$

(c)

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2,0}{0,6} = 3,33 \text{ m.}$$

(d)

$$y_m = 0,15 \text{ m.}$$

**17-6E.** Escreva a equação para uma onda se propagando no sentido negativo do eixo  $x$  e que tenha uma amplitude de 0,010 m, uma freqüência de 550 Hz e uma velocidade de 330 m/s.

► A forma da onda progressiva é

$$y(x, t) = y_m \text{ sen}(kx + \omega t).$$

Precisamos calcular o número de onda angular  $k$  e a freqüência angular  $\omega$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{(2\pi)(550)}{330} = 10,47 \text{ rad/m}$$

$$\omega = kv = (10,47)(330) = 3455 \text{ rad/s}$$

Então, a onda em questão é

$$y(x, t) = 0,010 \text{ sen}(10,47x + 3455t)$$

**17-14P.** (a) Escreva uma expressão que descreva uma onda transversal se propagando numa corda, no sentido  $+x$  com um comprimento de onda de 10 cm, uma freqüência de 400 Hz e uma amplitude de 2,0 cm. (b) Qual é a velocidade escalar máxima de um ponto da corda? (c) Qual é a velocidade escalar da onda?

► (a) Começamos calculando as quantidades  $k$  e  $\omega$  para montar a equação da onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = 0,20\pi \text{ rad/cm,}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(400) = 800\pi \text{ rad/s e}$$

$$y(x, t) = (2,0 \text{ cm}) \text{ sen}(0,20\pi x - 800\pi t).$$

(b)

$$u_{\text{máx.}} = y_m \omega = (2,0)(800\pi) = 5026 \text{ cm/s}$$

(c)

$$v = \lambda f = (10)(400) = 4000 \text{ cm/s.}$$

**17-16P.** Uma onda de freqüência 500 Hz tem uma velocidade de 350 m/s. (a) Quão afastados estão dois pontos que tem uma diferença de fase de  $\pi/3$  rad? (b) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos, num determinado ponto, em tempos separados de 1,00 ms?

► (a) Consideremos a função  $y(x, 0)$  da Fig. 17-4a. As fases da onda nesses dois pontos defasados devem ser iguais:

$$kx_1 = kx_2 + \phi$$

$$k(x_1 - x_2) = \phi$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\lambda\phi}{2\pi} = \frac{v\phi}{2\pi f} = \frac{(350)(\pi/3)}{(2\pi)(500)} = 0,117 \text{ m.}$$

(b) Agora consideramos a função  $y(0, t)$  da Fig. 17-4b:

$$-\omega t_1 = -\omega t_2 + \phi$$

$$\omega(t_2 - t_1) = \phi$$

$$\phi = 2\pi f \Delta t = (2\pi)(500)(0,001) = \pi \text{ rad.}$$

### Seção 17-6 Velocidade Escalar da Onda numa Corda Esticada

**17-18E.** As cordas de um violino, respectivamente mais leve e mais pesada, tem densidades lineares de 3,0 g/m e 2,9 g/m. Qual é a relação dos diâmetros dessas cordas, da mais pesada para a mais leve, supondo que são feitas do mesmo material?

► A densidade volumétrica das cordas é  $\rho = m/\pi r^2 L$ . Em termos da densidade linear dada, escrevemos  $\rho = \mu/\pi r^2$ . Como as cordas são feitas do mesmo material,

$$\frac{\mu_1}{r_1^2} = \frac{\mu_2}{r_2^2}.$$

Substituindo os dados fornecidos, chegamos à relação entre os diâmetros  $d_1$  e  $d_2$ :

$$d_1 = 1,017d_2.$$

**17-25P.** Uma corda esticada tem uma massa por unidade de comprimento de 5,0 g/cm e uma tensão de 10 N. Uma onda senoidal nessa corda tem uma amplitude de 0,12 mm e uma frequência de 100 Hz e se propaga no sentido de  $x$  decrescente. Escreva uma equação para essa onda.

► Com os dados fornecidos, calculamos inicialmente as grandezas  $v$ ,  $\omega$  e  $k$  necessárias para explicitar a onda:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0,5}} = 4,47 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(100) = 628,32 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{628,32}{4,47} = 140,50 \text{ m}^{-1}$$

Como a onda se propaga no sentido negativo do eixo  $x$ , temos

$$y(x, t) = (1,2 \times 10^{-4}) \text{ sen}(140,50x + (628,32t)).$$

**17-31P.** O tipo de elástico usado no interior de algumas bolas de beisebol e de golfe obedece à lei de Hooke para uma larga faixa de alongamento do elástico. Um segmento deste material tem um comprimento (não esticado)  $l$  e uma massa  $m$ . Quando uma força  $F$  é aplicada, o elástico estica de um comprimento adicional  $\Delta l$ . (a) Qual é a velocidade escalar (em termos de  $m$ ,  $\Delta l$  e a constante elástica  $k$ ) das ondas transversais neste elástico? (b) Usando sua resposta em (a), mostre que o tempo necessário para um pulso transversal percorrer o comprimento do elástico é proporcional a  $1/\sqrt{\Delta l}$  se  $\Delta l \ll l$  e é constante se  $\Delta l \gg l$ .

► (a) Com a força aplicada  $F = k \Delta l$  e a densidade do elástico dada por  $\mu = m/(l + \Delta l)$ , calculamos a velocidade escalar:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{k\Delta l(l + \Delta l)}{m}}$$

(b) O tempo necessário para o pulso transversal percorrer o comprimento do elástico é

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{k\Delta l(l + \Delta l)}}$$

Se  $\Delta l \ll l$ ,  $(\Delta l)^2$  é desprezível e a expressão para  $t$  reduz-se a

$$t \approx \sqrt{\frac{lm}{k\Delta l}},$$

ou seja, o tempo é proporcional a  $1/\sqrt{\Delta l}$ .

Se  $\Delta l \gg l$ , então  $t = \Delta l/v$ , caso em que a expressão para  $t$  reduz-se a

$$t \approx \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

**17-32P\*.** Uma corda uniforme de massa  $m$  e comprimento  $l$  está pendurada no teto. (a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de  $y$ , a distância até a extremidade mais baixa, e é dada por  $v = \sqrt{gy}$ . (b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para percorrer o comprimento da corda é dado por  $t = 2\sqrt{l/g}$ .

► (a) Consideremos o eixo  $y$  ao longo da corda, com origem na extremidade inferior da mesma. Para um elemento infinitesimal  $dm$  da massa da corda localizado em  $y$  a partir da origem, temos

$$d\tau = (dm)g = \mu g dy$$

que, integrando ao longo da corda, fornece

$$\tau(y) = \int_0^y \mu g dy' = \mu g y.$$

Levando este resultado para a relação da velocidade, obtemos

$$v(y) = \sqrt{\frac{\tau(y)}{\mu}} = \sqrt{g y}.$$

(b) Usando o resultado de (a),

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{g y}$$

$$\int_0^t dt' = \int_0^l (g y)^{-1/2} dy$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}} [2y^{1/2}]_0^l$$

$$t = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

sob uma tensão de 90 N. Ache (a) o valor máximo da velocidade transversal  $u$  e (b) o valor máximo da componente transversal da tensão. (c) Mostre que os dois valores máximos, calculados acima, ocorrem para os mesmos valores de fase da onda. Qual é o deslocamento transversal  $y$  da corda nessas fases? (d) Qual é a máxima potência transferida ao longo da corda? (e) Qual é o deslocamento transversal  $y$  quando esta transferência máxima de potência acontece? (f) Qual é a transferência mínima de potência ao longo da corda? (g) Qual é o deslocamento transversal  $y$  quando esta transferência mínima de potência ocorre?

► Começemos por construir a equação da propagação da onda na corda:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{90}{0,120}} = 27,39 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{27,39}{120} = 0,23 \text{ m}$$

$$y(x, t) = (5,0 \times 10^{-3}) \text{ sen } 2\pi(4,38x - 120t),$$

sendo  $x$  em metros e  $t$  em segundos.

(a) A velocidade transversal escalar máxima  $u_{\text{máx}}$  obtemos de

$$\begin{aligned} u_{\text{máx.}} &= \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\text{máx.}} = \omega y_m \\ &= (2\pi)(120)(5,0 \times 10^{-3}) \\ &= 3,77 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(b) A componente transversal da tensão é

$$\tau_{\text{transv.}} = \tau \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

e o valor máximo da componente transversal é

$$\begin{aligned} (\tau_{\text{transv.}})_{\text{máx.}} &= \tau k y_m \\ &= (90)(4,38)(2\pi)(5,0 \times 10^{-3}) \\ &= 12,38 \text{ N.} \end{aligned}$$

(c) Tanto a velocidade transversal  $u$  como a tensão transversal  $\tau_{\text{transv.}}$  tem as suas fases sob a função cosseno. Então, o mesmo par  $(x, t)$  maximiza ambas as grandezas, mas se esse par maximiza a função cosseno, ele anula a função seno, ou seja, se  $kx - \omega t = 0$ ,

### Seção 17-8 Energia e Potência numa Onda Progressiva

**17-33E.** A potência  $P_1$  é transmitida por uma onda de frequência  $f_1$  numa corda sob tensão  $\tau_1$ . Qual é a potência transmitida  $P_2$  em termos de  $P_1$  (a) se a tensão na corda for aumentada para  $\tau_2 = 4\tau_1$  e (b) se, ao invés, a frequência for diminuída para  $f_2 = f_1/2$ ?

► (a) Se a tensão na corda for quadruplicada, a velocidade de propagação fica duplicada. Sendo a potência média transmitida por uma onda dada por  $\bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2$ , a duplicação da velocidade implica na duplicação da potência transmitida.

(b) Como a frequência aparece ao quadrado na expressão da potência, sua diminuição pela metade, implicará na redução da potência a um quarto do seu valor inicial.

**17-35P.** Uma onda senoidal transversal é gerada numa extremidade de uma longa corda horizontal, por uma barra que se move para cima e para baixo entre extremos que distam 1,00 cm. O movimento é contínuo e repetido regularmente 120 vezes por segundo. A corda tem uma densidade linear de 120 g/m e é mantida

$y(x, y) = 0$ . (d) A potência transmitida ao longo da corda é dada por

$$P = \left(-\tau \frac{\partial y}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \tau k \omega y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Para a potência máxima transmitida temos então,

$$\begin{aligned} P_{\text{máx.}} &= \tau k \omega y_m^2 \\ &= (90)(2\pi)(4,38)(240\pi)(5,0 \times 10^{-3})^2 \\ &= 47 \text{ W.} \end{aligned}$$

(e) O deslocamento  $y$  correspondente à máxima potência transmitida é  $y = 0$ , já que o par  $(x, t)$  que maximiza a função cosseno é o que anula a função seno.

(f) A potência mínima transmitida é nula.

(g) A mínima potência transmitida acontece para  $y = y_m$ , já que o par  $(x, t)$  que anula o cosseno é aquele que maximiza o seno.

### Secção 17-11 Interferência de Ondas

**17-38P.** Uma fonte  $S$  e um detector de ondas de rádio  $D$  estão localizados ao nível do solo a uma distância  $d$  (Fig. 17-26). Ondas de rádio de comprimento  $\lambda$  chegam a  $D$ , pelo caminho direto ou por reflexão, numa certa camada da atmosfera. Quando a camada está numa altura  $H$ , as duas ondas chegam em  $D$  exatamente em fase. À medida que a camada sobe, a diferença de fase entre as duas ondas muda, gradualmente, até estarem exatamente fora de fase para uma altura da camada  $H + h$ . Expresse  $\lambda$  em termos de  $d$ ,  $h$  e  $H$ .

► Após a reflexão na altura  $H$ , as ondas chegam em  $D$  em fase:

$$2r_1 - d = 0,$$

sendo  $r_1 = \sqrt{H^2 + (d/2)^2}$ .

Após a reflexão na altura  $H + h$ , as ondas chegam em  $D$  em oposição de fase:

$$2r_2 - d = \lambda/2,$$

sendo  $r_2 = \sqrt{(H + h)^2 + (d/2)^2}$ . Combinando as duas equações para as interferências construtiva e destrutiva, vem

$$2r_2 - 2r_1 = \lambda/2,$$

$$\lambda = 4[\sqrt{(H + h)^2 + (d/2)^2} - \sqrt{H^2 + (d/2)^2}].$$

**17-41P\*.** Determine a amplitude da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência, tem amplitudes de 3,0 cm e 4,0 cm e diferença de fase de  $\pi/2$  rad.

► Consideremos as duas ondas senoidais na posição  $x = 0$ :

$$y_1 = 3,0 \text{ sen } \omega t \text{ e}$$

$$y_2 = 4,0 \text{ sen } (\omega t + \pi/2).$$

Agora, usando a relação trigonométrica  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta$  na onda  $y_2$ , efetuamos sua soma com  $y_1$ :

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = 3,0 \text{ sen } \omega t + 4,0 \text{ cos } \omega t$$

$$y = 3,0 [\text{sen } \omega t + 1,33 \text{ cos } \omega t].$$

A superposição dessas ondas produz uma onda da mesma forma de cada uma delas, que escrevemos genericamente como

$$y = y_m \text{ sen}(\omega t + \phi),$$

e, usando a mesma identidade trigonométrica, obtemos

$$y = y_m (\text{sen } \omega t \cos \phi + \cos \omega t \text{ sen } \phi),$$

onde  $\phi$  é a diferença de fase de  $y$  em relação a  $y_1$ . Comparando as duas formas que temos para  $y$ , escrevemos

$$\alpha \text{ sen } \phi = 1,33 \text{ e}$$

$$\alpha \text{ cos } \phi = 1,$$

onde  $\alpha$  é um fator de proporcionalidade entre as duas formas da função  $y$ . Dividindo as duas relações acima obtemos a constante de fase  $\phi$ :

$$\text{tg } \phi = 1,33$$

$$\phi = 0,93 \text{ rad.}$$

Elevando as relações acima ao quadrado e somando, obtemos o fator  $\alpha$ :

$$\alpha^2 (\text{sen}^2 \phi + \text{cos}^2 \phi) = 2,7689,$$

$$\alpha = 1,664.$$

Agora podemos explicitar a função  $y = y_1 + y_2$ :

$$y(t) = 0,05 \text{ sen}(\omega t + 0,93),$$

onde  $y_m = 1,664 \times 0,03 = 0,05$  m. Este problema também pode ser facilmente resolvido pelo método dos fasores. Com a escolha de uma escala adequada, a amplitude e a constante de fase são diretamente medidas com régua e transferidor. Refaça o problema usando os fasores para confirmar o resultado obtido pelo método analítico.

### Seção 17 -13 Ondas Estacionárias e Ressonância

**17-42E.** Uma corda sob tensão  $\tau_1$  oscila no terceiro harmônico com uma frequência  $f_3$ , e as ondas na corda tem comprimento de onda  $\lambda_3$ . Se a tensão for aumentada para  $\tau_f = 4\tau_1$  e a corda novamente levada a oscilar no terceiro harmônico, qual será (a) a frequência de oscilação em termos de  $f_3$  e (b) o comprimento de onda em termos de  $\lambda_3$ ?

► (a) Da relação  $v_i = \sqrt{\tau_i/\mu}$ , obtemos com a tensão final  $\tau_f = 4\tau_1$  que  $v_f = 2v_i$ . Então, para o “novo” terceiro harmônico teremos

$$f_{3f} = \frac{3}{2l}(2v_i) = 2f_{3i}.$$

(b) Para o comprimento de onda, teremos

$$\lambda_{3f} = \frac{2v_i}{2f_{3i}} = \lambda_{3i},$$

ou seja, a variação na tensão da corda duplica a velocidade e a frequência, mantendo inalterado o comprimento de onda.

**17-46E.** Uma corda de violão, de náilon, tem uma densidade linear de 7,2 g/m e está sob uma tensão igual a 150 N. Os suportes fixos estão distanciados 90 cm. A corda está oscilando de acordo com o padrão de onda estacionária mostrado na Fig. 17-27. Calcule (a) a velocidade escalar, (b) o comprimento de onda e (c) a frequência das ondas cuja superposição origina esta

onda estacionária.

► A onda estacionária indicada está vibrando no terceiro harmônico, ou seja,  $n = 3$ .

(a) Para a velocidade temos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{150}{7,2 \times 10^{-3}}} = 144 \text{ m/s}.$$

(b) Para o comprimento de onda,

$$\lambda_n = \frac{2l}{n},$$

$$\lambda_3 = \frac{(2)(0,90)}{3} = 0,60 \text{ m}.$$

(c) E para a frequência,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{144}{0,60} = 240 \text{ Hz}.$$

**17-48E.** Uma corda de 120 cm de comprimento é esticada entre suportes fixos. Quais são os três comprimentos de onda mais longos possíveis para ondas estacionárias nessa corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes.

► O comprimento de onda é dado por  $\lambda_n = 2l/n$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$  se a corda está fixa nas duas extremidades. Os três maiores comprimentos de onda serão então,

$$\lambda_1 = 2l = 2,40 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = l = 1,20 \text{ m e}$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}l = 0,80 \text{ m}.$$

**17-52E.** Uma ponta de uma corda de 120 cm é mantida fixa. A outra ponta é presa a um anel sem peso que pode deslizar ao longo de uma haste sem atrito, conforme mostrado na Fig. 17-28. Quais são os três mais longos comprimentos de onda possíveis para ondas estacionárias nessa corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes.

► Quando a corda está presa em só em uma extremidade, os comprimentos de onda possíveis são fornecidos pela relação  $\lambda_n = 4l/n$ , com  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ . Os três maiores comprimentos de onda serão

$$\lambda_1 = 4l = 4,80 \text{ m},$$

$$\lambda_3 = \frac{4}{3} l = 1,60 \text{ m e}$$

$$\lambda_5 = \frac{4}{5} l = 0,96 \text{ m.}$$

**17-54P.** Duas ondas estão se propagando na mesma corda, muito comprida. Um vibrador no extremo esquerdo da corda gera uma onda dada por

$$y = (6,0 \text{ cm}) = \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1}) x + (8,0 \text{ s}^{-1}) t],$$

enquanto um outro no extremo direito gera a onda

$$y = (6,0 \text{ cm}) = \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1}) x - (8,0 \text{ s}^{-1}) t].$$

(a) Calcule a frequência, o comprimento de onda e a velocidade escalar de cada onda. (b) Determine os pontos onde não existe movimento (os nós). (c) Em quais pontos o movimento da corda é máximo?

► (a) Para obter as grandezas pedidas só precisamos observar as quantidades fornecidas nas duas ondas dadas:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2,0 \text{ Hz,}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2,0 \text{ m e}$$

$$v = \lambda f = (2,0)(2,0) = 4,0 \text{ m/s.}$$

(b) A superposição das ondas dadas produz a onda estacionária

$$Y(x, t) = 2y_m \cos \pi x \cos 4\pi t,$$

cujos nós obtemos fazendo  $\cos \pi x = 0$ , condição satisfeita para

$$x = 0,50 \text{ m; } 1,5 \text{ m; } 2,5 \text{ m; } \dots$$

(c) Os antinós devem satisfazer a condição  $\cos \pi x = \pm 1$ , cujas posições são

$$x = 1,0 \text{ m; } 2,0 \text{ m; } 3,0 \text{ m; } \dots$$

**17-56P.** Uma corda está esticada entre suportes fixos separados por 75 cm. Observou-se que tem frequências ressonantes em 420 e 315 Hz e nenhuma outra neste intervalo. (a) Qual é a frequência de ressonância mais

baixa dessa corda? (b) Qual é a velocidade de onda para essa corda?

► Para uma corda fixa nas duas extremidades, temos  $2lf_n = nv$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$  Para as duas frequências dadas, escrevemos

$$\frac{420}{n_a} = \frac{315}{n_b},$$

onde  $n_a$  e  $n_b$  são valores consecutivos dos harmônicos  $n$ , tal que  $n_a = n_b + 1$ . Substituindo essa condição na igualdade acima, encontramos os harmônicos que correspondem às frequências dadas,  $n_a = 4$  e  $n_b = 3$ .

(a) Para a frequência fundamental temos

$$f_1 = \frac{420}{4} = 105 \text{ Hz.}$$

(b) A velocidade da onda é

$$v = 2lf_1 = 157,5 \text{ m/s.}$$

**17-60P.** Uma corda de 3,0 m de comprimento está oscilando na forma de uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda, cuja amplitude é 1,0 cm. A velocidade escalar da onda é de 100 m/s. (a) Qual é a frequência? (b) Escreva equações para duas ondas que, combinadas, resultem nessa onda estacionária.

► A corda está vibrando no terceiro harmônico, com comprimento de onda  $\lambda = 2,0 \text{ m}$ . Então, (a)

$$f = \frac{v}{\lambda} = 50 \text{ Hz}$$

(b) Se a amplitude da onda estacionária é 1,0 cm, a amplitude de cada uma das ondas combinadas é 0,5 cm. O número de onda angular é  $k = 2\pi/\lambda = \pi \text{ rad/m}$  e a frequência angular é  $\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$ . Portanto,

$$y_1 = (0,5) \text{ sen } \pi (x - 100t) \text{ e}$$

$$y_2 = (0,5) \text{ sen } \pi (x + 100t).$$

**17-63P.** Considere uma onda estacionária que é a soma de duas ondas idênticas se propagando em sentidos opostos. Mostre que a energia cinética máxima em cada meio comprimento de onda dessa onda estacionária é  $2\pi^2 \mu y_m^2 f v$ .

► A velocidade transversal de um elemento do meio é

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -2y_m \text{ sen } kx \text{ sen } \omega t,$$

tal que sua energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} dK &= \frac{1}{2} dm u^2 \\ &= 2\mu dx y_m^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 kx \operatorname{sen}^2 \omega t. \end{aligned}$$

A energia cinética máxima do elemento é

$$dK_m = 2\mu dx y_m^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 kx.$$

Lembrando que  $\omega = 2\pi f$ , integramos  $dK_m$  desde  $x = 0$  até  $x = \lambda/2 = \pi/k$ :

$$\begin{aligned} K_m &= 2\mu y_m^2 \omega^2 \int_0^{\pi/k} \operatorname{sen}^2 x dx \\ &= 2\mu y_m^2 \omega^2 \int_0^{\pi/k} \left[ \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2kx}{4k} \right]_0^{\pi/k} \\ &= 2\mu \pi^2 y_m^2 f v. \end{aligned}$$

**17-64P.** Um fio de alumínio de comprimento  $l = 60,0$  cm com área de seção transversal igual a  $1,00 \times 10^{-2}$  cm<sup>2</sup> e densidade  $2,60$  g/cm<sup>3</sup> é conectado a um fio de aço, de densidade  $7,80$  g/cm<sup>3</sup> e mesma área de seção transversal. O fio composto é conectado a um bloco de massa  $m = 10,0$  kg, conforme a Fig. 17-30, de forma que a distância  $l_2$  entre a junção e a roldana de suporte seja  $86,6$  cm. Ondas transversais são estabelecidas no fio usando-se uma fonte externa de frequência variável. (a) Ache a mais baixa frequência de vibração que dará origem a uma onda estacionária com nó no ponto de junção. (b) Quantos nós são observados nessa frequência?

► O fio composto está submetido à tensão  $T = mg = 98$  N e, lembrando que  $\rho = m/Al$ , a densidade linear de cada parte, de alumínio e aço, é, respectivamente,

$$\mu_1 = \rho_1 A = 2.6 \times 10^{-3} \text{ kg/m e}$$

$$\mu_2 = \rho_2 A = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/m.}$$

A tensão no fio é  $T = \mu v^2 = \mu \lambda^2 f^2$  e lembrando que  $l = n\lambda/2$ , temos

$$\mu_1 \lambda_1^2 f^2 = \mu_2 \lambda_2^2 f^2$$

$$\mu_1 \frac{4l_1^2}{n_1^2} = \mu_2 \frac{4l_2^2}{n_2^2},$$

que nos fornece

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{l_2 \sqrt{\mu_2}}{l_1 \sqrt{\mu_1}} = 2.5$$

Os valores de  $n$  que satisfazem a razão acima são  $n_1 = 2$  e  $n_2 = 5$ , do que obtemos

$$\lambda_1 = \frac{2l_1}{n_1} = 0.60 \text{ m e}$$

$$\lambda_2 = \frac{2l_2}{n_2} = 0.35 \text{ m.}$$

Voltando à relação da tensão,  $T = \mu_1 \lambda_1^2 f^2$ , obtemos a mais baixa frequência de vibração do sistema,

(a)  $f = 324$  Hz.

(b) As extremidades fixas são nós, evidentemente. O comprimento  $l_1$  acomoda um comprimento  $\lambda_1$ , com 3 nós, inclusive o do ponto de junção dos fios. O comprimento  $l_2$  acomoda 2.5 comprimentos  $\lambda_2$ , com 6 nós, incluindo o do ponto de junção. Então, o fio composto tem um total de 8 nós nesse modo vibrante.

### 17.3 Problemas Adicionais

**17-65.** Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por

$$y = (0, 10 \text{ m})(\operatorname{sen} \pi x/2) \operatorname{sen} 12\pi t,$$

onde  $x = 0$  numa das pontas da corda,  $x$  é dado em metros e  $t$  em segundos. Quais são (a) o comprimento da corda, (b) a velocidade escalar das ondas na corda e (c) a massa da corda? (d) Se a corda oscilar num padrão de onda estacionária referente ao terceiro harmônico, qual será o período de oscilação?

► (a) Da forma da onda dada, temos  $k = \pi/2$  rad/m e  $\lambda = 2\pi/k = 4.0$  m. Como a corda vibra no segundo harmônico,  $n = 2$ , resulta que

$$l = \lambda = 4.0 \text{ m.}$$

(b) A velocidade das ondas na corda obtemos de

$$v = \frac{\omega}{k} = 24 \text{ m/s}$$

(c) Com a tensão aplicada e a velocidade do item (b), temos

$$\mu = \frac{T}{v^2} = 0.347 \text{ kg/m}$$

A massa da corda então é

$$m = \mu l = 1.39 \text{ kg.}$$

(d) Se a corda vibra no terceiro harmônico, a frequência é  $f = nv/2l = 9.0 \text{ Hz}$  e o período de oscilação é  $T = f^{-1} = 0.11 \text{ s}$ .

**17-67.** Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por

$$y_1 = 0,050 \cos(\pi x - 4\pi t),$$

$$y_2 = 0,050 \cos(\pi x + 4\pi t),$$

onde  $x$ ,  $y_1$  e  $y_2$  estão em metros e  $t$  em segundos.

(a) Qual é o menor valor positivo de  $x$  que corresponde a um nó? (b) Em quais instantes no intervalo  $0 \leq t \leq 0,50 \text{ s}$  a partícula em  $x = 0$  terá velocidade zero?

► (a) Usando a identidade trigonométrica,

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

chegamos à forma da onda estacionária resultante:

$$Y(x, t) = 0.10 \cos\pi x \cos 4\pi t.$$

A cada nó, devemos ter  $Y = 0$ . Portanto,

$$\cos\pi x = 0$$

$$\pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 0.5 \text{ m}$$

(b) A velocidade para qualquer partícula da corda oscilante é

$$u(x, t) = \frac{\partial Y}{\partial t} = -(4\pi)(0.10) \cos\pi x \sin 4\pi t.$$

Em  $x = 0$ , a partícula tem velocidade nula quando

$$\sin 4\pi t = 0$$

$$4\pi t = n\pi$$

$$t = \frac{n}{4},$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dentro do intervalo em questão, a velocidade é nula para  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t = 0.25 \text{ s}$  e  $t = 0.5 \text{ s}$ .